

Aula 14 – O Problema da Interpolação e Polinômio de Lagrange

Bem-vindos à nossa jornada pela Análise Numérica! Imagine-se em um cenário onde você tem apenas alguns pontos de dados, como medições esporádicas de temperatura ao longo do dia ou o valor de uma ação em momentos específicos. Como preencher as lacunas entre esses pontos? Como estimar o que aconteceu nos intervalos não medidos ou até mesmo prever o que pode acontecer a seguir, com base no comportamento conhecido? Essa é a essência do problema da interpolação, uma ferramenta poderosa que nos permite construir pontes de conhecimento onde antes havia apenas ilhas de informação.

Nesta aula, mergulharemos no coração da interpolação, desvendando como podemos usar um conjunto limitado de dados para construir uma função contínua que os represente. Nosso foco será o Polinômio de Lagrange, uma abordagem clássica e elegante para resolver esse desafio. Você aprenderá não apenas a definição e a teoria por trás dessa técnica, mas também a construir e aplicar o Polinômio de Lagrange, compreendendo suas propriedades e, igualmente importante, suas limitações computacionais.

Ao final desta aula, você será capaz de entender a necessidade da interpolação em diversos campos, desde a engenharia até a ciência de dados, e dominará a construção do Polinômio de Lagrange. Nosso objetivo é que você possa aplicar esses conceitos para resolver problemas práticos, utilizando a intuição matemática por trás de cada passo. Prepare-se para conectar a teoria com aplicações reais, abrindo portas para uma compreensão mais profunda de como os dados podem ser modelados e interpretados no mundo digital de hoje.

A Necessidade de Interpolar: Preenchendo Lacunas de Conhecimento

No dia a dia de muitas profissões, raramente temos acesso a todas as informações de forma contínua. Pense em um engenheiro que monitora a pressão em um gasoduto: ele não consegue medir a pressão a cada milissegundo em todos os pontos. Em vez disso, ele coleta dados em intervalos regulares ou em pontos específicos. O mesmo ocorre com um analista financeiro que acompanha o preço de uma commodity, ou um cientista de dados que lida com amostras de um fenômeno complexo. Nesses cenários, a questão que surge é: como podemos estimar os valores entre os pontos de dados conhecidos?

É aqui que a interpolação entra em cena, atuando como uma ponte matemática. Ela nos permite construir uma função que passa exatamente por todos os pontos de dados fornecidos, preenchendo as lacunas de informação de forma razoável e matematicamente consistente. Imagine que você tem um mapa com apenas algumas cidades marcadas; a interpolação seria como traçar uma estrada suave que conecta todas essas cidades, permitindo que você estime a localização de qualquer ponto ao longo dessa rota.

Definição Formal

Dado um conjunto de $n + 1$ pontos de dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, onde os x_i são distintos, o problema da interpolação consiste em encontrar uma função $P(x)$ tal que $P(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Essa função $P(x)$ é chamada de função interpoladora.

Embora existam diversos tipos de funções interpoladoras (polinomiais, trigonométricas, splines), nesta aula focaremos nos polinômios devido à sua simplicidade e boas propriedades matemáticas.

O Desafio da Unicidade: Existe Apenas Uma Maneira?

Depois de entender a necessidade de preencher as lacunas com uma função interpoladora, uma pergunta fundamental surge: será que existe apenas uma única função que consegue passar por todos os nossos pontos de dados? Ou poderíamos ter várias curvas diferentes que se encaixam nos mesmos pontos, mas se comportam de maneira distinta entre eles? Essa questão é crucial, pois a confiabilidade da nossa estimativa depende da singularidade da solução. Se houvesse múltiplas soluções, qual delas deveríamos escolher?

Teorema da Existência e Unicidade

Dados $n + 1$ pontos distintos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, existe um e apenas um polinômio de grau no máximo n que passa por todos esses pontos.

Felizmente, para o caso de polinômios, a matemática nos oferece uma resposta reconfortante. O Teorema da Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador garante que, dados $n + 1$ pontos distintos, existe um e apenas um polinômio de grau no máximo n que passa por todos esses pontos. Isso significa que, se você tiver três pontos, haverá um único polinômio de grau no máximo dois (uma parábola) que os conecta. Se tiver dois pontos, um único polinômio de grau no máximo um (uma linha reta) os unirá.

2 pontos

Uma única linha reta possível

3 pontos

Uma única parábola possível

Pense nisso como um jogo de "ligue os pontos" com uma regra especial: você só pode usar linhas retas ou curvas suaves de um determinado tipo (polinômios de grau limitado). Se você tiver apenas dois pontos, só há uma linha reta possível para conectá-los. Se tiver três pontos, há apenas uma parábola que os atravessa. Essa unicidade é uma das grandes vantagens de usar polinômios para interpolação, pois nos dá confiança de que estamos encontrando a "melhor" representação polinomial para nossos dados, dentro do grau especificado.

Essa garantia de unicidade é o alicerce sobre o qual construiremos o Polinômio de Lagrange. Saber que estamos buscando uma solução única nos permite focar na metodologia de construção, sabendo que, uma vez encontrada, ela é a única de seu tipo. Isso simplifica o problema e nos dá uma base sólida para avançar.

Polinômio de Lagrange: Uma Construção Elegante

Agora que sabemos que existe um polinômio interpolador único, a próxima pergunta natural é: como construí-lo? Existem várias abordagens para essa tarefa, mas uma das mais elegantes e conceitualmente claras é a do Polinômio de Lagrange. Joseph-Louis Lagrange, um dos maiores matemáticos da história, nos legou uma forma engenhosa de montar esse polinômio a partir de "blocos de construção" simples.

📌 A Ideia Central

Construir um conjunto de polinômios auxiliares, chamados de **polinômios de base de Lagrange**, que têm uma propriedade muito especial. Para cada ponto de dados (x_k, y_k) , construímos um polinômio de base $L_k(x)$ que vale 1 em x_k e 0 em todos os outros x_i (onde $i \neq k$).

Imagine que você tem uma equipe de especialistas, e cada um deles é responsável por "ativar" apenas um dos seus pontos de dados, enquanto mantém os outros "desativados".

Polinômio de Base de Lagrange

Matematicamente, para cada $k = 0, 1, \dots, n$, o polinômio de base de Lagrange $L_k(x)$ é definido como:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

01

Propriedade em x_k

Se você substituir x por x_k , o numerador e o denominador se tornam idênticos, resultando em 1.

02

Propriedade em outros pontos

Se você substituir x por qualquer outro x_j (onde $j \neq k$), um dos termos no produto do numerador será $(x_j - x_j)$, que é zero, fazendo com que todo o $L_k(x_j)$ seja zero.

Cada $L_k(x)$ é um polinômio de grau n . Essa é a propriedade mágica que buscamos!

Construindo o Polinômio Final

Com esses blocos de construção em mãos, o Polinômio de Lagrange final, $P(x)$, é simplesmente uma soma ponderada desses polinômios de base, onde os pesos são os valores y_k correspondentes aos pontos de dados. Ou seja:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

Por que isso funciona?

Ao avaliarmos $P(x)$ em qualquer x_j , todos os termos $y_k L_k(x_j)$ serão zero, exceto o termo $y_j L_j(x_j)$. E como $L_j(x_j) = 1$, teremos $P(x_j) = y_j \cdot 1 = y_j$. Isso garante que o polinômio $P(x)$ passa por todos os pontos de dados (x_j, y_j) , exatamente como desejamos.



Polinômios de Base

Cada $L_k(x)$ é uma "chave" que ativa apenas um ponto



Ponderação

Multiplicamos cada chave pelo valor desejado y_k



Combinação

Somamos tudo para construir a função final

Pense nos polinômios de base $L_k(x)$ como "chaves" que ativam apenas um "interruptor" (o ponto x_k) e deixam todos os outros "interruptores" (os outros x_i) desligados. Ao multiplicar cada chave pelo valor desejado y_k e somar tudo, você constrói uma função que "acende" cada ponto com o valor correto, sem interferir nos outros. Essa é a beleza da construção de Lagrange: ela divide um problema complexo em subproblemas mais simples e os combina de forma inteligente.

As Propriedades que Tornam Lagrange Especial

A construção do Polinômio de Lagrange não é apenas elegante; ela também confere ao polinômio interpolador algumas propriedades muito úteis e importantes. Compreender essas características nos ajuda a apreciar a força e as limitações do método, guiando nossa escolha em aplicações práticas.

1

Interpolação Exata

O Polinômio de Lagrange **passa exatamente por todos os pontos de dados fornecidos**. Isso significa que $P(x_i) = y_i$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$. Essa é a definição de um polinômio interpolador e o objetivo principal do método.

2

Grau Mínimo

Cada polinômio de base $L_k(x)$ é um polinômio de grau n . Como o Polinômio de Lagrange $P(x)$ é uma soma de $n + 1$ desses polinômios de base, ele também será um polinômio de grau no máximo n .

3

Linearidade

Se você tiver dois conjuntos de dados e interpolar cada um separadamente, a interpolação da soma dos dados será a soma das interpolações. Isso é útil em certas análises e demonstrações matemáticas.

4

Base Completa

Os polinômios de base de Lagrange formam uma base para o espaço dos polinômios de grau no máximo n . Qualquer polinômio de grau no máximo n pode ser expresso como uma combinação linear desses polinômios de base.

Unicidade vs. Método de Construção

Além disso, os polinômios de base de Lagrange formam uma base para o espaço dos polinômios de grau no máximo n . Isso significa que qualquer polinômio de grau no máximo n pode ser expresso como uma combinação linear desses polinômios de base. Essa é uma ideia poderosa em álgebra linear e mostra a completude do conjunto $L_k(x)$ para a tarefa de interpolação polinomial.

📌 Importante Observar

Embora o Polinômio de Lagrange seja único, sua forma de construção é apenas uma das muitas maneiras de chegar a ele. Outros métodos, como o Polinômio de Newton, também produzem o *mesmo* polinômio interpolador, mas com uma abordagem construtiva diferente que pode ser mais eficiente em certas situações.

A escolha do método de construção muitas vezes depende de considerações computacionais, como a necessidade de adicionar novos pontos de dados sem recalculá-los tudo do zero.

Passa pelos pontos

Interpolação exata garantida

Grau mínimo

Polinômio de grau no máximo n

Linearidade

Propriedades algébricas robustas

Em resumo, as propriedades do Polinômio de Lagrange – passar pelos pontos, ter o grau mínimo necessário e a linearidade – o tornam uma ferramenta fundamental na análise numérica. Ele nos dá uma maneira direta e compreensível de construir o polinômio único que representa nossos dados, servindo como um pilar para métodos mais avançados.

Lagrange na Prática: Um Exemplo Detalhado

A teoria por trás do Polinômio de Lagrange é fascinante, mas sua verdadeira utilidade se revela quando o colocamos em prática. Vamos considerar um cenário simples para ilustrar como construir e aplicar este polinômio. Imagine que você está monitorando a temperatura de um componente eletrônico ao longo do tempo. Você coletou os seguintes dados em três momentos distintos:

Tempo (x_i)	Temperatura (y_i)
0	10
1	12
3	16

Objetivo

Encontrar um polinômio de grau no máximo 2 que interpole esses três pontos e usá-lo para estimar a temperatura no tempo $x = 2$.

Passo 1: Construir os Polinômios de Base

Primeiro, vamos construir os polinômios de base de Lagrange ($L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$) para $n = 2$:

Para $L_0(x)$ (associado a $(x_0, y_0) = (0, 10)$):

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 3)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(-1)(-3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3}$$

Para $L_1(x)$ (associado a $(x_1, y_1) = (1, 12)$):

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 3)} = \frac{x(x - 3)}{(1)(-2)} = \frac{x^2 - 3x}{-2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x)$$

Continuação do Exemplo: Combinando os Polinômios

Para $L_2(x)$ (associado a $(x_2, y_2) = (3, 16)$):

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(3 - 0)(3 - 1)} = \frac{x(x - 1)}{(3)(2)} = \frac{x^2 - x}{6}$$

Passo 2: Formar o Polinômio de Lagrange

Agora, combinamos esses polinômios de base com os valores y_i correspondentes para formar o Polinômio de Lagrange $P(x)$:

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$P(x) = 10 \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{3} \right) + 12 \left(-\frac{1}{2}(x^2 - 3x) \right) + 16 \left(\frac{x^2 - x}{6} \right)$$

$$P(x) = \frac{10}{3}(x^2 - 4x + 3) - 6(x^2 - 3x) + \frac{8}{3}(x^2 - x)$$

$$P(x) = \left(\frac{10}{3} - 6 + \frac{8}{3} \right) x^2 + \left(-\frac{40}{3} + 18 - \frac{8}{3} \right) x + \left(\frac{30}{3} \right)$$

$$P(x) = \left(\frac{18}{3} - 6 \right) x^2 + \left(-\frac{48}{3} + 18 \right) x + 10$$

$$P(x) = (6 - 6)x^2 + (-16 + 18)x + 10$$

$$P(x) = 0x^2 + 2x + 10$$

$$P(x) = 2x + 10$$

Observação Interessante

Neste caso específico, o polinômio interpolador é uma reta! Isso acontece porque os pontos $(0, 10)$, $(1, 12)$ e $(3, 16)$ são colineares.

Passo 3: Estimar o Valor

Agora, para estimar a temperatura no tempo $x = 2$:

$$P(2) = 2(2) + 10 = 4 + 10 = 14$$

Resultado

A temperatura estimada no tempo $x = 2$ é de **14 unidades**.

Este exemplo demonstra a construção passo a passo e a aplicação do Polinômio de Lagrange, conectando os dados observados a uma função contínua que nos permite fazer estimativas.

Os Calcanhares de Aquiles de Lagrange: Desvantagens Computacionais

Embora o Polinômio de Lagrange seja conceitualmente elegante e garanta a unicidade do polinômio interpolador, ele não está isento de desvantagens, especialmente quando consideramos sua aplicação em cenários computacionais mais complexos. É fundamental entender essas limitações para escolher o método de interpolação mais adequado para cada problema.

Adição de Novos Pontos

Uma das principais desvantagens surge quando precisamos **adicionar um novo ponto de dados** ao conjunto existente. Se você tem $n + 1$ pontos e decide incluir um $(n + 2)$ -ésimo ponto, todo o trabalho de construção dos polinômios de base de Lagrange precisa ser refeito do zero.

Cada $L_k(x)$ original era de grau n , e com um novo ponto, todos os novos polinômios de base serão de grau $n + 1$. Isso significa que não há uma maneira eficiente de atualizar o polinômio interpolador; é necessário recalcular todos os termos, o que pode ser computacionalmente custoso para grandes conjuntos de dados.

Fenômeno de Runge

Outro problema significativo, especialmente com um grande número de pontos, é o **fenômeno de Runge**. Este fenômeno ocorre quando tentamos interpolar uma função suave com um polinômio de alto grau usando pontos igualmente espaçados.

Em vez de uma aproximação suave, o polinômio interpolador pode apresentar oscilações selvagens e indesejadas nas extremidades do intervalo, mesmo que a função original seja bem-comportada. Imagine tentar encaixar uma régua flexível em muitos pontos: ela pode curvar-se de forma estranha entre eles, especialmente nas pontas.

Mais Limitações Computacionais

Além disso, a avaliação do Polinômio de Lagrange em um ponto específico pode ser computacionalmente intensiva se o número de pontos for grande. Cada termo $L_k(x)$ envolve um produto de n fatores, e há $n + 1$ desses termos para somar. Isso leva a uma complexidade computacional de $O(n^2)$ para cada avaliação, o que pode ser lento para n muito grandes. Métodos como o Polinômio de Newton, que exploraremos na próxima aula, oferecem uma forma mais eficiente de adicionar pontos e avaliar o polinômio.

Característica	Polinômio de Lagrange
Construção	Direta, baseada em polinômios de base que "isolam" cada ponto.
Adição de Pontos	Requer recálculo completo de todos os polinômios de base e do polinômio final.
Complexidade	$O(n^2)$ para construção e avaliação em um ponto.
Estabilidade	Pode sofrer com o Fenômeno de Runge para alto grau e pontos igualmente espaçados.
Vantagem Principal	Clareza conceitual e prova direta da existência e unicidade.

Conclusão sobre as Desvantagens

Essas desvantagens não invalidam o Polinômio de Lagrange, mas nos alertam para a necessidade de considerar alternativas em cenários onde a eficiência computacional, a estabilidade numérica ou a capacidade de atualização incremental são cruciais. A escolha do método de interpolação é uma decisão de engenharia, que pondera a simplicidade, a precisão e o custo computacional.

Conectando com o Mundo Real: Aplicações e Ferramentas Modernas

Apesar das suas desvantagens computacionais em certos cenários, o conceito de interpolação polinomial, e o Polinômio de Lagrange em particular, continua sendo uma ferramenta fundamental e um pilar teórico para diversas aplicações práticas no mundo moderno. A capacidade de estimar valores entre pontos de dados é crucial em campos que vão desde a engenharia até a ciência de dados e finanças.



Engenharia

A interpolação é usada para suavizar dados de sensores, estimar valores em pontos não medidos em simulações de elementos finitos ou para criar curvas de projeto a partir de pontos discretos. Por exemplo, ao projetar uma asa de avião, os engenheiros podem definir alguns pontos-chave e usar a interpolação para gerar o perfil aerodinâmico suave entre eles.



Finanças

A interpolação é vital para estimar taxas de juros em datas intermediárias (curvas de juros), precificar derivativos ou preencher lacunas em séries temporais de dados de mercado. Um analista pode ter o preço de uma ação em alguns dias e usar a interpolação para estimar seu valor em qualquer outro dia dentro do período observado.



Física

Pode-se interpolar dados experimentais para encontrar tendências ou prever resultados em condições não testadas. A interpolação permite que cientistas preencham lacunas em medições e façam previsões baseadas em observações limitadas.



Ciência de Dados

A ciência de dados e a aprendizagem de máquina também se beneficiam, especialmente no pré-processamento de dados para lidar com valores ausentes (imputação) ou para resamplear dados para diferentes frequências.

Ferramentas Computacionais Modernas

A boa notícia é que você não precisa implementar o Polinômio de Lagrange manualmente para cada problema. As linguagens de programação e bibliotecas modernas oferecem ferramentas robustas para realizar interpolação de forma eficiente.

Python

Em **Python**, bibliotecas como **NumPy** e **SciPy** são indispensáveis. O SciPy, por exemplo, possui a função `scipy.interpolate.interp1d` que, embora não implemente diretamente o Polinômio de Lagrange em sua forma explícita para alto grau (preferindo splines ou outros métodos mais estáveis), se baseia nos mesmos princípios de interpolação.

Para fins educacionais e para entender a construção de Lagrange, é possível implementá-lo com funções básicas do NumPy.

MATLAB

No **MATLAB**, a função `polyfit` pode ser usada para encontrar os coeficientes de um polinômio que se ajusta a um conjunto de pontos, e `polyval` para avaliá-lo.

Embora `polyfit` use uma abordagem de mínimos quadrados para ajustar um polinômio de grau menor que o número de pontos, para interpolação exata (grau n para $n + 1$ pontos), ela também pode ser empregada.

Integração Teoria-Prática

A integração com essas ferramentas computacionais é o que torna a Análise Numérica tão poderosa na prática. Compreender a teoria por trás do Polinômio de Lagrange permite que você use essas ferramentas de forma mais inteligente, sabendo o que está acontecendo "por baixo do capô" e entendendo as implicações das suas escolhas.

Reflexões sobre a Escolha do Método

Ao longo desta aula, exploramos o problema da interpolação e nos aprofundamos no Polinômio de Lagrange, uma ferramenta clássica e fundamental para preencher lacunas em nossos dados. Vimos que ele oferece uma solução única e elegante para construir um polinômio que passa por todos os pontos de dados fornecidos. No entanto, também discutimos suas desvantagens, como a ineficiência ao adicionar novos pontos e a suscetibilidade ao fenômeno de Runge para polinômios de alto grau.



Clareza Conceitual

Ideal para entender fundamentos e provas teóricas



Poucos Pontos

Excelente para conjuntos pequenos de dados



Ensino

Perfeito para aprender interpolação polinomial

A escolha do método de interpolação ideal é uma decisão que depende diretamente do contexto do problema. Se você tem um número pequeno de pontos e a clareza conceitual é prioritária, ou se precisa de uma base teórica sólida, o Polinômio de Lagrange é uma excelente escolha. Ele é perfeito para entender os fundamentos da interpolação polinomial e a prova de existência e unicidade.

No entanto, para aplicações práticas com muitos pontos, onde a eficiência computacional e a estabilidade numérica são cruciais, métodos como o Polinômio de Newton (que veremos na próxima aula) ou splines cúbicas são geralmente preferidos. Esses métodos oferecem maneiras mais robustas de lidar com grandes conjuntos de dados e evitam as oscilações indesejadas que podem surgir com polinômios de alto grau.

Em última análise, o Polinômio de Lagrange serve como uma porta de entrada essencial para o mundo da interpolação. Ele nos ensina os princípios básicos e nos prepara para explorar técnicas mais avançadas, equipando-nos com o conhecimento necessário para tomar decisões informadas ao enfrentar desafios de modelagem de dados em qualquer campo.

Em Prática e Autoavaliação

Em prática:

Para aplicar o que você aprendeu, comece identificando cenários onde você tem dados discretos e precisa estimar valores intermediários. Tente construir um Polinômio de Lagrange para 3 ou 4 pontos manualmente para solidificar a compreensão. Em seguida, explore como as bibliotecas Python (SciPy) ou MATLAB podem realizar interpolação, comparando os resultados e refletindo sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

Autoavaliação

1 Qual é o principal objetivo do problema da interpolação?

- a) Encontrar a derivada de uma função em um ponto.
- b) Estimar valores de uma função entre pontos de dados conhecidos.
- c) Calcular a integral definida de uma função.
- d) Resolver sistemas de equações lineares.

2 Quantos polinômios de grau no máximo n podem passar por $n + 1$ pontos de dados distintos?

- a) Infinitos.
- b) Nenhum.
- c) Exatamente um.
- d) Depende dos pontos.

3 Uma das principais desvantagens computacionais do Polinômio de Lagrange é:

- a) Sua incapacidade de interpolar pontos colineares.
- b) A necessidade de recalculá-lo todo ao adicionar um novo ponto.
- c) Sua complexidade de $O(n)$ para avaliação.
- d) A exigência de pontos igualmente espaçados.

4 O fenômeno de Runge está associado a qual característica da interpolação polinomial de alto grau?

- a) Aumento da precisão em todas as regiões do intervalo.
- b) Oscilações indesejadas nas extremidades do intervalo.
- c) Redução do grau do polinômio interpolador.
- d) Simplificação da construção dos polinômios de base.

5 Questão Dissertativa

Explique como os polinômios de base de Lagrange contribuem para a construção do polinômio interpolador final e qual é a propriedade fundamental que cada um deles possui.

Gabarito

1. b) | 2. c) | 3. b) | 4. b)

Próxima Aula e Recursos Adicionais

Próxima Aula:

Na Aula 15, continuaremos nossa exploração da interpolação polinomial, focando no **Polinômio de Newton e a Forma das Diferenças Divididas**. Veremos como este método oferece uma alternativa mais eficiente para a construção do polinômio interpolador, especialmente quando novos pontos de dados são adicionados, superando algumas das desvantagens computacionais do Polinômio de Lagrange.

Recursos Adicionais:



Livro Recomendado

"Análise Numérica" de
Richard L. Burden e J. Douglas
Faires

Para aprofundamento teórico
e exemplos adicionais sobre
interpolação e métodos
numéricos.



Documentação SciPy

Python - SciPy Library

Para explorar implementações
práticas de interpolação em
Python, incluindo funções
como `scipy.interpolate`.



Tutoriais MATLAB

MATLAB Interpolation

Para ver a aplicação em um
ambiente de computação
numérica profissional, com
funções como `polyfit` e
`polyval`.